Karl Marx ve Matematik

Yosum Kurtulmaz*

Karl Marx, 5 Mayıs 1818'de Trier kentinde doğdu. Bu kentteki Gymnasium'dan (Almanya'da gidilebilecek en yüksek dereceli lisedir. Türkiye'de lise düzeyinin üstündedir) mezun olduktan sonra önce Bonn'da daha sonra Berlin'de üniversiteye devam etti. Önce hukuk öğrenimi gördü fakat daha sonra tarih ve felsefeyi seçti. 1841'de "Demokritos - Epikür Felsefelerinin Karşılaştırması" üzerine hazırladığı tezle doktorasını verdi.

Marx, matematikçi değildi. Matematiğe ilgisi "Kapital" üzerine çalışırken ekonomi ile bağlantılı olarak yani tamamen pratik gereksemelerden ortaya çıktı. Engels'e 11 Ocak 1858 tarihinde gönderdiği mektubunda şöyle yazar:

" Ekonomik ilkeleri çözerken hesaplama yanlışlarıyla öyle kötü engellendim ki, umutsuzluktan bir an önce cebir öğrenmeyi tasarladım. Aritmetik bana yabancı kalıyor. Ama cebirsel yol boyunca kendi yönümde yeniden hızla ilerliyorum." ([1], syf. 16).

Damadı Paul Lafargue onun matematik sevgisini şöyle anlatır: "... Marx'ın bir başka dikkate değer zihinsel dinlenme biçimi daha vardı: Özel zevki olan matematik. Cebir ile ilgilenmek ona manevi bir rahatlama verirdi: mücadeleler ile geçen hayatında en sıkıntılı anlarda matematiğe sığındığı görülürdü. Eşinin son hastalığı sırasında, bilimsel çalışmalarına kendisini bütünüyle veremediği günlerde eşinin çektiği acıların (eşi çiçek hastalığı geçiriyordu Y. K.) yarattığı çöküntüyü üzerinden atmak için tek çıkar yol olarak matematiğe gömülmeyi buldu. Istırapla geçen bu günler boyunca, matematiksel sonsuz küçükler hesabı üzerine bir eser yazmıştı ki: uzmanlar bu yapıtın büyük bir bilimsel değeri bulunduğunu söylüyorlardı ve toplu yapıtları içerisinde bu da yer alacaktı. Yüksek matematikte o, diyalektik hareketin en mantıki ve aynı zamanda en yalın biçimini buluyordu. Bir bilimin, matematiği kullanmayı öğrenmediği sürece gerçekten gelişmiş olamayacağını kanısındaydı." ([2], syf. 84).

Marx'ın matematiğe ilgisi Kapital'i yazarken ortaya çıkan ihtiyaçlara dayanmakla birlikte "*.. örneğin, yüksek cebirle kıyaslandığında matematiğin çok kolay bir kısmı*" ([3], syf. 7) diye nitelendirdiği diferansiyel hesaba niçin geçtiği tam olarak bilinmiyor. Manchester'da Ekim 1865'de Engels'i ziyaretinden sonra ona yazdığı mektupta şöyle der:

" *Mancester'dayken bana diferansiyal kalkülüsü açıklamamı istedin. Biraz sonra vereceğim örnekten açıkça anlaşılacaktır. Diferansiyel kalkülüsün tamamı bir eğri üzerindeki noktaya teğet çizme işinden ortaya çıkar....."*([3], syf 7).

Marx, diferansiyel hesabı öğrenmek için o dönemde Cambridge öğrencilerine okutulan ders kitaplarını inceledi. Fransız baş rahip Sauri'nin Leibnitz yöntemlerine dayanan ve onun notasyonu ile yazılmış olan "Cours complet mathematics" adlı kitabından sonra Newton'un "De analyse per aequationes numero termiforum infinitas" adlı çalışmasını ve J.L. Boucharlat'nın "Elements de calcul differential et du calcul integral" kitaplarını okudu, özetlerini çıkardı, notlar aldı. Euler'in, Mac Laurin'in, Lacroix'in Hind'in, Hemming'in ve başkalarının da kitaplarını inceledi, bu kitapların özetini ve kullanılan notasyonları çıkarttı. Lagrange'ın düşüncelerini ayrıntılı olarak öğrenmek, Marx'ı diferansiyal hesabın doğasını açıklamak amacıyla kendi yöntemini bulmaya itmiştir. Ömrünü Marx'ın el yazmalarını incelemeye adamış olan Rus matematikçi S. A. Yanovskaya, Marx'ın matematik çalışmalarının o dönemde Cambridge'de okutulan ders kitapları ile yönlendirilmiş olmasına dikkat çeker çünkü Newton-Leibniz kliği nedeniyle o dönemde kıta Avrupa'sındaki matematiksel gelişmeler İngiliz müfredatında yer almıyordu. ([3], syf. 8). Bu nedenle Marx, örneğin, Cauchy'nin limit kavramı temelindeki gelişmelerden habersizdi. Ona matematik konusunda rehberlik eden ve Cambridge'de matematik lisansı yapmış olan Samel Moore'da bazı durumlarda yetersiz kalıyordu. Engels'e 1873'de yazdığı mektupta şöyle der:

"Moore'a bir süredir zihnimi meşgul eden bir problemden bahsediyordum. Bununla birlikte, O, en azından şimdilik bu problemin çözülemeyeceğini düşünüyor çünkü problem pek çok değişken içeriyor ve bu değişkenlerin büyük kısmı da henüz keşfedilmemiş. Problem şu: Bir yıl içindeki v.s.... ücretlerin, indirim oranlarının v.s.... hareketlerini gösteren inişli çıkışlı zigzaglar şeklindeki grafikleri bilirsin. Krizleri farklı bir şekilde, bu yükseliş ve düşüşleri düzensiz eğriler gibi analiz ederek hesaplamaya teşebbüs ettim ve krizleri belirleyen temel yasaları matematiksel olarak belirleyebileceğime inandım (ve yeteri kadar çalışılırsa bunun mümkün olduğuna hala inanıyorum). Dediğim gibi, Moore bunun şimdilik mümkün olamayacağını düşünüyor ve ben de şimdilik vazgeçmeye karar verdim." ([4], syf. 6).

Sosyal bilimlerin matematik gibi formel mantığı kullanmadıkları, ayrıca da binlerce değişken ve bunların arasındaki ilişkiler düşünüldüğünde bunun pek mümkün olmadığı sonucu çıkabilir. Marx'ın bu isteğini, Carchedi, " … kriz yasalarını tamamen matematiksel olarak belirlemek mümkün olmasa bile, ekonomik göstergelerin çevrimsel hareketini (aşağı ve yukarı) yüksek matematik kullanarak analiz etmek kesinlikle mümkün olurdu. Bu Marx'ın öngörüsüydü." şeklinde değerlendirir.([4], syf. 7).

Marx'ın matematik çalışmaları genellikle Almanca yazılmış, okuduğu kitap İngilizce ya da Fransızca ise o dilde notlar alınmış yaklaşık 1000 yapraktan oluşurlar. Bu notların gözden geçirilip düzenlenmiş biçimi Kor Kitap tarafından "Matematiksel Elyazmaları" adı ile ikinci kez (ilk kez 1990'da Başak Yayınlar tarafından yayımlanmıştır) basılmıştır [1]. Kitapta da görüleceği üzere, Marx diferansiyel hesaba ağırlık vermiştir.

Şimdi de Marx'ın diferansiyel hesaba bakışını ve kendini yorumunu inceleyelim. Marx, diferansiyel hesap tarihini Newton'dan başlayarak inceler ve üç bölüme ayırır:

1) Newton ve Leibnitz'in "gizemsel" diferansiyel hesabı,
2) Euler ve d'Alembert'in "ussal (rational)" diferansiyel hesabı,
3) Lagrange'ın "katışıksız" (pure) cebirsel hesabı.

Bu yazıda Newton ve Leibnitz'in diferansiyel hesap yöntemi, Marx'ın eleştirisi ve Marx'ın kendi yöntemini onun kullandığı notasyonla anlatacağım. Meraklı okuyucular diğer yöntemleri ve bunlara getirilen eleştirileri ayrıntılı olarak [1] numaralı kaynakta bulabilirler.

$y = x^3$ fonksiyonunu alalım. x, x_1'e dx kadar, y, y_1'e dy kadar değişsin yani $x_1 = x + dx$ $y_1 = y + dy$ olsun. $y_1 = x_1^3$' de yukarıdaki eşitlikleri koyarsak $y + dy = (x + dx)^3 = x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$ olur. Sağ taraftaki $y = x^3$, sol taraftaki aynı ifade ile sadeleşir ve $dy = (x + dx)^3 = 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3$ biçimini alır. Her iki yanı dx'e bölersek $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 3xdx + (dx)^2$ sonucunu buluruz. Leibnitz , dx'in yok sayılabilecek kadar küçük (sonsuz küçük) olduğunu söyler ve sağ taraftaki dx'li terimleri 0'a eşitler. Böylece $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ sonucunu bulur. Marx, $3x^2$'nin daha türev alınmadan ve dx'ler sıfıra eşitlenmeden ortaya çıktığına dikkat çeker. Ayrıca $3xdx + (dx)^2$'nin bir çeşit hokkabazlıkla ya da el çabukluğu ile ortadan kaldırıldığını, bu nedenle yöntemin "gizemli" olduğunu söyler. Eğer dx sonsuz küçük bir nicelikse nasıl olup da $(x+dx)^3$'ün binom açılımında sanki sıradan bir sayıymış gibi davranıldığını sorgular. "Sonsuz küçük" olarak adlandırılan niceliklerin teorik ve varlıksal durumlarına dikkat çeker.

Marx'ın günümüzde artık kesinleşmiş ve yüz yıllardır kullanılmaya devam eden gerçek sayı, limit ve süreklilik kavramlarından haberdar olmadığını burada bir kez daha vurgulamak isterim.

Gizemli bulduğu bu yönteme karşı Marx, aşağıdaki yöntemi geliştirdi: Yine $y = x^3$ olsun. $x_1 - x = dx$ ve $y_1 - y = dy$ olmak üzere, x'den farklı bir x_1, y'den farklı bir y_1 alalım.

$\frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1^3 - x^3}{x_1 - x} = \frac{(x_1 - x)(x^2 + xx_1 + x_1^2)}{x_1 - x}$ olur. Pay ve paydadaki ortak terimler sadeleşince Marx'ın geçici türev (provisional derivative) olarak adlandırdığı $\frac{dy}{dx} = x^2 + xx_1 + x_1^2$ bulunur. Kesin (definite) türevi bulmak için x_1'den x'e, başka bir deyişle onun en küçük değerine (yani $x_1 = x$) dönersek bu eşitlik $\frac{0}{0}$ ya da $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ olur. Marx'ın bu yöntemi bugünkü $x_1 - x$ farkının ortadan kaldırılmasının yani x_1'den x'e geçişin limit yardımıyla olduğu yönteme oldukça yaklaşmıştır. Bu yöntemin tarihsel önemi, Marx'ın $\frac{dy}{dx}$'i iki sıfırın oranı olarak görmek yerine (yani $\frac{0}{0}$) önce x'ten x_1'e (ve dolayısıyla y'den y_1'e) bir artış ve daha sonra da x_1'i onun en küçük değeri olan x'e indirmenin bir işlemsel sembolü olarak kullanmasıdır.

Felsefi olarak bakıldığında, önce x_1'in x'den farklı olduğunun kabulü ve sonrasında x_1'in x'e yaklaşması ve farkın 0 olmasının, diyalektik materyalizmin "yadsımanın yadsınması" ilkesinden başka bir şey olmadığı görülür. Marx, diyalektiği matematiğe bu yolla uygulamayı başarmıştır.

Fakat ne yazık ki Marx'ın yöntemi sınırlı bir uygulamaya sahipti çünkü limit kullanmadan sadeleştirme yapmak ve sonucu bulmak her zaman mümkün olmuyordu. Örneğin $y = \sin x$'in türevini almak için bu yöntemi uyguladığımızda $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x}$ fonksiyonunda pay ile paydada bir sadeleştirme olmaz. Şimdilerde bu türev alma işlemini şöyle yapıyoruz:

$$\frac{d}{dx}(sinx) = \lim_{x \to x_1} \frac{\sin x_1 - \sin x}{x_1 - x} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}$$
$$= \left[-\sin x \left(\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h} \right) + \cos x \left(\lim_{h \to 0} \frac{sinh}{h} \right) \right]$$

$\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$ ve $\lim_{h \to 0} \frac{sinh}{h} = 1$ olduğundan,

$\frac{d}{dx}(\sin x) = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$ bulunur.

Günümüz okuyucularına bu tartışmalar geçmişte kalmış gelebilir. Fakat büyük bir filozof, iktisatçı, tarihçi ve sosyal bilimci olan Marx'ın diyalektiği matematiğe uygulama çabası, matematiksel kavramların felsefi yönlerini tartışması hem matematikçiler ve matematik tarihçileri hem de felsefeciler için çok önemlidir. El yazmaları ile sadece matematikçiler ve felsefeciler değil, sosyal bilimciler de yakından ilgileniyor. Marksist iktisatçı Guglielmo Carchedi'ye göre "Marx'ın diferansiyel kalkülüs çalışması onun sosyal analiz yöntemini daha da geliştirmek için bir destek ve materyal arayışı idi. Bu açıdan bakıldığında, el yazmaları matematikçiler ya da matematik tarihçilerinden çok sosyal bilimciler için önem taşımaktadır."

Kısacası Marx, 200 yıl öteden çok çeşitli alanlarda günümüze ışık tutmaya devam ediyor.

***Doç.Dr, Bilkent Üniversitesi, Matematik Bölümü, Öğretim Görevlisi.**

Kaynaklar:

[1] Matematiksel El Yazmaları, Karl Marx, (çeviren Öner Ünalan), Kor Kitap, Şubat 2019.

[2] Ateşi Geleceğe Taşıyanlar, Anılarla Marx-Engels, (çeviren Alaattin Bilgi), Kor Kitap, Kasım 2018.

[3] "The Dialectics of Differentiation", Peter Hans Matthews, Middlebury College Economics Discussion Paper No. 02-03, June 2002.

[4] "Dialectics and Temporality in Marx's Mathematical Manuscripts", Guglielmo Carchedi,

Science & Society, Vol 72, No. 4 (Oct. 2008), pp. 415 – 426 (12 pages).